ТЕМА 3 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Исследование устойчивости движения и аналитическое конструирование регуляторов систем управления

Пусть система управления описывается в виде:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), u(t)), \tag{3.1}$$

где $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ – соответственно векторы состояния и управлений, $F(t, x(t), u(t))$ $-n$- мерная вектор-функция, описывающая движение системы.

Для постановки задач исследования устойчивости и конструирование регуляторов нужно задать определенное желаемое изменение состояния системы (3.1). Будем считать, что траектория $x(t)$ на интервале $[t_0, \infty)$ изменяется по заданному программному режиму:

$$x(t) = x_{np}(t), \quad t \in [t_0, \infty). \tag{3.2}$$

Тогда задачу программного управления можно сформулировать так: найти программное управление $u_{np}(t)$, при котором решение системы (3.1) обеспечивает условие (3.2).

Пусть в момент времени $t^{(0)}$ система удовлетворяет условию $x(t^{(0)}) = x_{np}(t^{(0)})$. Задача исследования устойчивости программного движения $x_{np}(t)$ заключается в нахождении решения системы (3.1) под действием программного управления $u(t) = u_{np}(t)$ для $t > t^{(0)}$, если в начальный момент времени $t^{(0)}$ вектор состояния системы получает некоторое возмущение $\Delta x(t^{(0)})$:

$$x(t^{(0)}) = x_{np}(t^{(0)}) + \Delta x(t^{(0)}). \tag{3.3}$$

Определение 3.1. Программное движение $x_{np}(t)$ системы (3.1) называется устойчивым по Ляпунову, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, если для начальных условий системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), u_{np}(t)) \tag{3.4}$$

выполняется неравенство $\left\|\Delta x(t^{(0)})\right\| = \left\|x(t^{(0)}) - x_{np}(t^{(0)})\right\| \leq \delta$, то при $t > t^{(0)}$ для решения системы (3.4) справедлива оценка $\left\|\Delta x(t)\right\| \leq \varepsilon$, де $\Delta x(t) = x(t) - x_{np}(t)$.

Программное движение системы (3.4) называется асимптотически устойчивым, если к условиям устойчивости добавляется граничное условие: $\lim\limits_{t \to \infty} \left\|\Delta x(t)\right\| = 0$.

Под действием начальных возмущений траектория возмущенного движения будет иметь вид $x(t) = x_{np}(t) + \Delta x(t)$. Запишем уравнение для $\Delta x(t)$ согласно системе (3.4):

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x(t)}{dt} &= F(t, x_{np}(t) + \Delta x(t), u_{np}(t)) - F(t, x_{np}(t), u_{np}(t)) = \\ &= \Phi(t, \Delta x(t), u_{np}(t)). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Очевидно, что устойчивость по Ляпунову программного движения системы (3.4) означает устойчивость по Ляпунову невозмущенного движения $\Delta x(t) \equiv 0$ для системы (3.5).

Отметим, что в дальнейшем будем исследовать на устойчивость невозмущенное движение $\Delta x(t) \equiv 0$.

Обычно, программное движение системы (3.4) и соответствующее невозмущенное движение системы (3.5) являются неустойчивыми. Поэтому будем рассматривать задачу обеспечения устойчивости этих систем путем введения дополнительного управления $\Delta u(t, \Delta x(t))$, которое вместе с программным управлением составляет закон управления системой:

$$u(t) = u_{np}(t) + \Delta u(t, \Delta x(t)). \qquad (3.6)$$

Тогда задача аналитического конструирования регулятора системы (3.1) состоит в выборе такой зависимости $\Delta u(t, \Delta x(t))$, при которой решение $\Delta x(t) \equiv 0$ системы уравнений

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = X(t, \Delta x(t), \Delta u(t, \Delta x(t))), \qquad (3.7)$$

где $X(t, \Delta x(t), \Delta u(t, \Delta x(t))) = \Phi(t, \Delta x(t), u_{np}(t) + \Delta u(t, \Delta x(t)))$, было бы устойчивым (асимптотически устойчивым) по Ляпунову.

Если задать заранее структуру зависимости $\Delta u(t, \Delta x(t))$ с точностью до значений некоторых параметров, то задача аналитического конструирования регулятора сводится к выбору значений параметров системы (3.7) в соответствии с условиями устойчивости по Ляпунову невозмущенного решения $\Delta x(t) \equiv 0$.

3.2. Устойчивость в применении к аналитическому конструированию регуляторов линейных систем управления

Пусть система (3.7) является линейной:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t, \Delta x(t)). \qquad (3.8)$$

Обозначив $\Delta x(t) = x(t)$, $\Delta u(t) = u(t)$, перепишем систему (3.8) в виде:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t, x(t)). \qquad (3.9)$$

Задачу аналитического конструирования регулятора для линейной системы (3.9) сформулируем следующим образом: найти матрицу $C(t)$ размерности $m \times n$ такую, что при управлении $u(t, x(t)) = C(t)x(t)$ нулевое решение $x(t) \equiv 0$ системы (3.9), то есть системы уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A(t) + B(t)C(t))x(t) \qquad (3.10)$$

будет асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Рассмотрим линейную стационарную систему $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu(x)$ и управление будем искать в виде $u(x) = Cx$. Тогда систему (3.10) можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = (A + BC)x. \tag{3.11}$$

Воспользуемся известными результатами исследования устойчивости решений линейных систем дифференциальных уравнений [16].

Теорема 3.1. Для асимптотической устойчивости по Ляпунову линейной стационарной системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{3.12}$$

необходимо и достаточно, чтобы все корни λ_j характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{3.13}$$

имели отрицательные действительные части:

$$\operatorname{Re}\lambda_j < 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.14}$$

Здесь и далее E – единичная матрица.

Применим эту теорему к задаче аналитического конструирования регулятора системы (3.11). Запишем для этой системы характеристическое уравнение

$$\det(A + BC - \lambda E) = 0. \tag{3.15}$$

Корни данного уравнения будут зависеть от неизвестных элементов матрицы C, то есть $\lambda_j = \lambda_j(C)$.

Согласно теореме 3.1, неизвестные элементы матрицы C выбираем из условия $\operatorname{Re}\lambda_j < 0, \quad j = \overline{1, n}$, что и обеспечит асимптотическую устойчивости системы (3.11).

Теорема 3.2 (Критерий Раусса-Гурвица). Пусть характеристическое уравнение (3.13) имеет вид:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0\,. \qquad (3.16)$$

Из коэффициентов этого характеристического уравнения составим матрицу (она называется матрицей Гурвица)

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n+1} & a_2 \end{bmatrix}, \qquad (3.17)$$

где $a_j = 0$ при $j > n$, $a_0 > 0$.

Тогда для того, чтобы все корни характеристического уравнения (3.16) имели отрицательные действительные части: $\mathrm{Re}\lambda_j < 0, \quad j = \overline{1,n}$, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры этой матрицы были положительны, то есть должна выполняться система неравенств:

$$\Delta_1 = a_1 > 0\,, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0\,, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0\,,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{и т.д.} \qquad (3.18)$$

Если применить критерий Раусса-Гурвица к задаче аналитического конструирования регулятора системы (3.11), то получим главные миноры, которые будут зависеть от неизвестных элементов матрицы C. В результате имеем систему неравенств

$$\Delta_j(C) > 0, \ j = \overline{1, n}. \tag{3.19}$$

Елементы матрицы C, в этой системе неравенств, согласно теореме 3.2, обеспечивает отрицательность действительных частей корней характеристического уравнения, то есть выполнение условия (3.14). Тогда согласно критерию асимптотической устойчивости (теорема 3.1) линейная стационарная система (3.11) будет асимптотически устойчивой по Ляпунову.

На основании результатов об управляемости и наблюдаемости систем управления рассмотрим в качестве примера конструктивный способ нахождения управления $u(x)$ в линейных стационарных системах и исследуем условия существования матрицы C, при которых система $\dfrac{dx}{dt} = (A + BC)x$ ($A, B, C - const$) будет асимптотически устойчивой.

Рассмотрим систему со скалярным управлением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \ A, b - const. \tag{3.20}$$

Здесь A – $n \times n$ матрица, b – n-вектор-столбец, u – скаляр.

Теорема 3.3. Если система (3.20) вполне управляема, то есть выполняется условие

$$\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0, \tag{3.21}$$

то существует функция управления

$$u = c^T x, \tag{3.22}$$

где $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, при которой система

$$\frac{dx}{dt} = (A + bc^T)x \tag{3.23}$$

имеет заранее заданные произвольные корни характеристического уравнения

$$\det(A + bc^T - \lambda E) = 0. \tag{3.24}$$

Доказательство этой теоремы можно найти, в частности, в [4]. Доказательство построено так, что одновременно указан алгоритм нахождения величин $c_1,\ldots,c_n$ по известным значениям корней $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ характеристического уравнения (3.24). В процессе доказательства получено явный вид вектора c:

$$c=(S^{-1})^T\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ p_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \ldots & 1 \end{bmatrix}^{-1}(p-a) \qquad (3.25)$$

Здесь $S=(b, Ab,\ldots, A^{n-1}b)$, $\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix}=S^{-1}A^n b$,

a – n- вектор-столбец, который находится через известные значения корней $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ характеристического уравнения (3.24), фактически это значение коэффициентов соответствующего характеристического полинома.

Для того, чтобы решить задачу аналитического конструирования одномерного (отметим, что таким образом можно применить к конструированию многомерного) регулятора, нужно выбрать вектор a таким, чтобы он обеспечивал отрицательность действительных частей корней характеристического уравнения (3.24) системы управления (3.20). При этом условии вектор c, полученный через вектор a согласно формуле (3.25), обеспечит асимптотическую устойчивость линейной системы. Тогда управление, по теореме 3.3, будет определяться формулой (3.22).

3.3. Применение метода Ляпунова к исследованию устойчивости программных движений

Рассмотрим систему управления:

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(t, x(t), u(t, x(t))) \tag{3.26}$$

соответствующей системе (3.7) при $\Delta x(t) = x(t)$, $\Delta u(t) = u(t)$.

Как известно из теории устойчивости [23], наиболее общим методом исследования систем на устойчивость является так называемый метод функций Ляпунова (или прямой метод, или метод Ляпунова). Этот метод не требует знания общего решению системы дифференциальных уравнений (3.26) и позволяет сделать вывод о характере устойчивости нулевого решения системы, используя функции Ляпунова, которые должны быть специально построены. По характеру поведения функций Ляпунова по системе (3.26) делается вывод об устойчивости или неустойчивости нулевого решения.

Наведем определения и формулировки основных теорем второго метода Ляпунова. Пусть для системы (3.26) существует такая совокупность управлений $u(t, x(t))$, при которых в некоторой области

$$\|x\| \le H \tag{3.27}$$

выполняются условия существования решений уравнений (3.26). Здесь H – некоторое заданное число, $H > 0$.

Пусть функция $X(t, x(t), u(t, x(t)))$ – аналитическая (непрерывная и дифференцированная) в области (3.27) и удовлетворяет условию $X(t, 0, u(t, 0)) = 0$.

Рассмотрим стационарную систему, то есть частный случай системы (3.26), когда правая часть уравнений явно не зависит от времени:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, u(x)) \tag{3.28}$$

Введем в рассмотрение непрерывную функцию $v(x)$, которая удовлетворяет условиям:

а) $v(0) = 0$;

б) $v(x)$ – однозначна в области (3.27);

в) $\dfrac{\partial v(x)}{\partial x_j}$, $j=\overline{1,n}$ - непрерывны в области (3.27).

Определение 3.2. Функция $v(x)$ называется положительно-определенной, если для некоторого заданного числа $H>0$ в области $\|x\|\le H$ выполняется условие: $v(x)>0$, $\|x\|\ne 0$.

Определение 3.3. Функция $v(x)$ называется положительно-постоянной, если для некоторого заданного числа $H>0$ в области $\|x\|\le H$ выполняется условие $v(x)\ge 0$.

Аналогично вводятся понятия отрицательно-определенной и отрицательно-постоянной функции.

Определение 3.4. Функция $v(x)$ называется знакопеременной, если в области $\|x\|\le H$ для сколь угодно малого заданного числа $H>0$ она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Функции $v(x)$ называются функциями Ляпунова.

Примером положительно-определенной функции Ляпунова является функция $v(x)=x^T Dx$, где D – квадратная симметричная матрица, для которой выполняются неравенства Сильвестра:

$$d_{11}>0,\ \det\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}>0,\ \ldots,\ \det\begin{pmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix}>0. \quad (3.29)$$

Теорема 3.4. Если для системы управления (3.28) можно определить такую положительно-определенную функцию $v(x)$, чтобы ее полная производная по t согласно этой системе

$$\frac{dv}{dt}=grad^T v(x)\frac{dx}{dt}=grad^T v(x)X(x,u(x))=w(x) \qquad (3.30)$$

была отрицательно-постоянной функцией $w(x) \le 0$, то программное движение $x(t) \equiv 0$ системы (3.28) устойчиво по Ляпунову.

Теорема 3.5. Если для системы (3.28) можно определить такую положительно-определенную функцию $v(x)$, чтобы ее полная производная по t согласно этой системе

$$\frac{dv}{dt} = grad^T v(x) \frac{dx}{dt} = grad^T v(x) X(x, u(x)) = w(x)$$

была отрицательно-определенной функцией $w(x) < 0$, то программное движение $x(t) \equiv 0$ системы (3.28) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Теорема 3.6. Если для системы (3.28) можно найти такую функцию $v(x)$, чтобы ее полная производная (3.30) согласно этой системе была отрицательно-определенной функцией $w(x) < 0$, а сама функция $v(x)$ при этом не была положительно-постоянной, то есть в сколь угодно малой области $\|x\| \le H$ (H - заданное число, $H > 0$) $v(x)$ может принимать отрицательные значения, то программное движение $x(t) \equiv 0$ системы (3.28) неустойчиво по Ляпунову.

Замечание 3.1. Можно исследовать на устойчивость систему управления (3.26), правая часть которой явно зависит от t. Тогда используется понятие функции Ляпунова, параметрически зависящей от t: $v(t, x)$ – дифференцированная по своим аргументами функция при $t > t_0$ в области $\|x\| \le H$ (H - заданное число, $H > 0$) такая, что $v(t, 0) \equiv 0$.

Здесь и далее t_0 – начальный момент времени.

Рассмотрим метод исследования на устойчивость по первому (линейному) приближению системы управления (3.28). Этот метод называют еще первым методом Ляпунова. При его применении из правой части уравнений нелинейной системы выделяется линейная по x часть. Затем отдельно исследуется на устойчивость система, в уравнении которой справа стоит только выделенная линейная функция. Это система называется системой первого или линейного приближения. Тогда характер устойчивости решения начальной нелинейной системы будет таким же, как и решение системы первого приближения. Формулировка основных теорем этого метода приведены ниже.

Запишем систему (3.28) в виде:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu(x) + \tilde{X}(x, u(x)), \tag{3.31}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} | x=0 & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} | x=0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} | x=0 & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} | x=0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} | x=0 & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial u_m} | x=0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_n}{\partial u_1} | x=0 & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial u_m} | x=0 \end{pmatrix},$$

функция $\tilde{X}(x, u(x))$ при $x \to 0$ имеет порядок малости не ниже второго. Правая часть системы (3.28) – n-мерная вектор-функция:

$$X(x, u(x)) = (X_1(x, u(x)), \dots, X_n(x, u(x)))^T.$$

Пусть управления задается в виде $u(x) = Cx$. Тогда система первого приближения имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = (A + BC)x. \tag{3.32}$$

Теорема 3.7. Если программное движение $x(t) \equiv 0$ для системы первого приближения $\frac{dx}{dt} = (A + BC)x$ является асимптотически устойчивым по Ляпунову, то такое движение асимптотически устойчиво и для нелинейной системы (3.31) независимо от вида нелинейных функций $\tilde{X}(x,u(x))$.

Теорема 3.8. Если среди корней характеристического уравнения системы первого приближения (3.32) $\det(A+BC-\lambda E)=0$ найдется хотя бы один с положительной действительной частью, то программное движение $x(t)\equiv 0$ нелинейной системы (3.31) будет неустойчивый по Ляпунову независимо от вида нелинейных функций $\tilde{X}(x,u(x))$.

Теорема 3.9. Если характеристическое уравнение $\det(A+BC-\lambda E)=0$ системы первого приближения (3.32) не имеет корней с положительными действительными частями, то в зависимости от характера нелинейности функций $\tilde{X}(x,u(x))$, программное движение $x(t)\equiv 0$ нелинейной системы (3.31) может быть как устойчивым, так и неустойчивым по Ляпунову.

Определение 3.5**.** Программное движение системы $x(t)\equiv 0$

$$\frac{dx}{dt}=X(x,u(x))+R(t,x) \tag{3.33}$$

называется устойчивым при постоянно действующих возмущений, если для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0, \exists\delta_2>0$ такие, что, как только

$$\|x(t_0)\|\le\delta_1,\ \|R(t_0,x)\|\le\delta_2,$$

то при $t\ge t_0$ для траектории системы выполняется неравенство $\|x(t)\|\le\varepsilon$, $t\ge t_0$.

Теорема 3.10. Если для системы $\dfrac{dx}{dt}=X(x,u(x))$ можно найти такую положительно-определенную функцию $v(x)$, чтобы ее полная производная по t согласно этой системе $\dfrac{dv}{dt}=grad^T v(x)X(x,u(x))=w(x)$ была отрицательно-постоянной функцией $w(x) \leq 0$ (то есть выполнялись условия теоремы 3.4), то программный движение $x(t) \equiv 0$ системы (3.33) будет устойчивым при постоянно действующих возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М., 1983.

2. Беллман Р. Динамическое программирование. – М., 1960.

3. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. – М., 1972.

4. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К., 1975.

5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М., 1980.

6. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М., 1975.

7. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М., 1975.

8. Острем К. Введение в стохастическую теорию оптимального управления. – М., 1973.

9. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. – М., 1968.

10. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М., 1978.

Дополнительная

11. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М., 1979.

12. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными обьектами. – М., 1976.

13. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. – М., 1971.

14. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. – М., 1984.

15. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К., 1983.

16. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М., 1969.

17. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К., 1985.

18. Бублик Б.Н., Данилов В.Я., Наконечный А.Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах / Учеб. пособие. – К., 1988.

19. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. – М., 1971.

20. Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. – М., 1969.

21. Зайцев Г.Ф., Костюк В.И., Чинаев П.И. Основы автоматического управления и регулирования. – К., 1977.

22. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автома тического регулирования. – М., 1981.

23. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М., 1971.

24. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М., 1973.

25. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М., 1972.

26. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск, 1974.

27. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М., 1981.

28. Пропой А.И. Элементы теории дискретных оптимальных процессов. – М., 1973.

29. Растригин Л.А. Современные принципы управления сложными сис темами. – М., 1980.

30. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. III. Оптимальное управление системами. – М., 1982.

31. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управ ления. – М., 1978.

32. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М., 1977.

33. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М., 1969.